

文章编号: 1000 8055(2008)09 1637-04

分位点形式专家信息的一致性检验方法

马湲梅, 武小悦, 刘 琦

(国防科技大学 信息系统与管理学院, 长沙 410073)

摘 要: 给出了分位点形式专家信息的一致性定义; 使用假设检验方法构造了统计量, 并给出了一定置信水平下检验阈值的确定方法和分位点形式专家信息一致性检验步骤; 最后通过算例验证了给出的方法的有效性.

关 键 词: 专家信息; 一致性; 检验; 分位点

中图分类号: TP182

文献标识码: A

Consistency test method for single expert's information described by fractiles

MA Li mei, WU Xiaoyue, LIU Qi

(College of Information System and Management, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The definition of expert's consistency was given for expert's information described by fractiles. According to the hypothesis testing theory, the test statistic was constructed, the method for setting critical value was presented, and the procedure was built for consistency testing of single expert's information. Finally, an example was given to show the validation of the method.

Key words: expert's information; consistency; test; fractile

现代装备(尤其是航空航天装备)技术复杂、造价昂贵, 试验成本较大. 因此, 以大样本统计理论为基础的传统试验分析方法越来越难以适应装备试验评估要求. 目前, 以小样本为基础的小子样试验评估方法已得到广泛应用. 其中, Bayes 方法^[1]由于能够充分利用各种来源的信息得到重视. 对于高可靠性、造价昂贵的装备系统(如导弹系统等), 其历史信息、相似系统信息和不同环境下试验信息可能都非常少, 因而专家信息成为 Bayes 方法验前信息的重要来源.

专家信息是领域专家凭借相关经验给出的估计和判断, 带有很强的主观性. 很多文献指出, 为了保证信息的有效性, 需对专家给出的信息进行一致性检验, 并采用定量方式加以衡量^[2,4]. 如使

用熵测量专家提供信息量^[3]、使用现场数据校验专家信息的准确度、或通过一定测试给出专家自身的准确系数^[2,4], 作为专家信息可信度的衡量. 这些方法需要一定条件, 如历史或现场数据等. 现有的专家信息一致性检验主要针对多个专家提供信息之间的一致性进行分析, 对单个专家的一致性涉及不多. 而单个专家信息的一致性是在验前信息有效性的前提, 最终将影响到对装备性能的估计. 本文给出了单个专家信息的一致性定义, 并提供了分位点形式专家信息一致性检验的详细流程.

本文所用符号及含义如下:

n 专家给出分位点个数;

p_i 专家给出分位点的概率值;

收稿日期: 2007 08 23; 修订日期: 2008 04 04

基金项目: 国家自然科学基金(70571083)

作者简介: 马湲梅(1981-), 女, 河北辛集人, 硕士, 主要研究方向为装备试验鉴定.

x_i 概率为 p_i 的分位点值;

$f(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ 分位点拟合分布, 其中 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ 为分布的参数;

x_{p_i} 拟合分布中概率为 p_i 的分位点值;

$1-\alpha$ 置信水平;

δ_i 分位点 x_i 与 x_{p_i} 的相对偏差;

δ_{mean} 相对偏差均值;

$\Delta_{1-\alpha}$ 置信水平 $1-\alpha$ 下相对偏差阈值;

$\text{Beta}(a, b)$ 参数为 a, b 的 Beta 分布。

1 分位点形式专家信息一致性定义

专家信息可根据专家的习惯采用不同的描述形式^[5]。在实际应用中, 单一形式或不同形式的信息可能并不一致。例如, 不熟悉概率统计理论的专家给出的分位点信息中, 某分位点与其它分位点严重偏离; 专家给出的参数的矩与分位点两种方式的信息可能存在严重差异性等。针对这些问题, 本文对单个专家信息的一致性给出如下定义。

定义1: 若单个专家给出的信息中, 将不同描述方式给出的专家信息, 通过一定数学转换给出的验前分布相同(或相互偏差在一定范围内), 则认为该专家给出的信息具有一致性。

该定义只是一个定性说明, 如何定量判断还需进一步说明。显然, 对多种描述方式进行判断, 首先应保证每种描述方式给出的信息都是一致的。对于使用均值、方差等方式给出的信息, 由于信息量少, 不需要进行一致性检验。工程实际中, 分位点是专家对参数进行估计或判断时常采用的描述形式^[2,3,5,7]。专家通常给出3个或3个以上分位点, 个别不一致的分位点将导致验前信息无效, 因此, 必须对分位点形式的信息进行一致性检验。

定义2: 若专家给出的 n 个概率为 $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ 的分位点 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 满足以下条件:

① $0 < p_i \leq 1$, 且若 $p_i \leq p_j$, 则 $x_i \leq x_j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$;

② 一定置信水平 $1-\alpha$ 下, 若每个分位点 x_i 与拟合分布中分位点值 x_{p_i} 的相对偏差 δ_i 小于一定值, 即 $\delta_i \leq \Delta_{1-\alpha}$, $\Delta_{1-\alpha} > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, 则有 $1-\alpha$ 的把握认为该组分位点是一致的。

条件①说明, 专家给出的分位点信息应符合概率论中分位点定义; 条件②说明, 分位点应与参数服从的分布中相应分位点保持一致, 且一致的程度可以由置信水平控制。由于分布参数的验前分布通常是未知的, 如何确定验前分布、每个分位

点到分布中分位点的相对偏差 δ_i 如何定义、一致性阈值 $\Delta_{1-\alpha}$ 应如何确定等问题是判定分位点是否一致的关键, 以下将分别详述。

2 分位点形式专家信息一致性检验

该一致性检验问题可视为假设检验问题, 提出原假设和备择假设如下:

H_0 : 分位点 i 与其它分位点一致;

H_1 : 分位点 i 与其它分位点不一致。

根据假设检验方法, 首先需构造用于检验的统计量, 然后给出一定置信水平下统计量的阈值, 最终给出原假设的拒绝域。具体步骤如下:

1) 在 $(0, 1)$ 范围内随机生成 n 个概率值 p_i 和分位点值 x_i , 并分别排序, 使之满足分位点信息一致定义中①的要求, 分位点信息可表示为

$$p_i = \int_0^{x_i} f(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) dx, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

2) 根据最小二乘法, 给定验前分布的分布形式, 如正态分布、 Beta 分布等, 使用 Matlab 求解参数 $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$, 最小二乘法公式如下

$$E = \min_{(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)} \left[\sum_{i=1}^n (p_i - \int_0^{x_i} f(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) dx)^2 \right] \quad (2)$$

其中 E 为所有分位点概率值与分布中计算得到概率值的误差平方和, 带入不同的 $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$, 找到使 E 最小的一组就确定了分布 $f(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$;

3) 根据公式(1)倒推, 使用 Matlab 计算拟合分布 $f(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ 中, 概率为 p_i 的分位点 x_{p_i} ;

4) 计算相对偏差

$$\delta_i = \frac{|x_i - x_{p_i}|}{x_{p_i}}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

至此, 检验统计量构造完毕。

5) 计算 n 个分位点 δ_i 值, 取其平均值

$$\delta_{\text{mean}} = \sum_{i=1}^n \delta_i / n \quad (4)$$

6) 重复步骤1)~5)充分多次, 得到大量 δ_{mean} 值。由于 x_i 和 x_{p_i} 偏差越小表明一致性越好, 所以 δ_{mean} 的理想值为0。但工程实际中, 这样的理想状态通常很难达到, 因此, 应能够让用户选择在不同的置信水平下, 根据不同的阈值对统计量进行检验。

将大量 δ_{mean} 值进行由小到大排序, 在置信水

平 $1-\alpha$ 下, 根据面积计算出 δ_{mean} 的左侧 α 分位点作为一致性检验阈值 $\Delta_{1-\alpha}$. $1-\alpha$ 越大, $\Delta_{1-\alpha}$ 值越小, 表明越有把握认为分位点是一致的. 如图 1 所示.

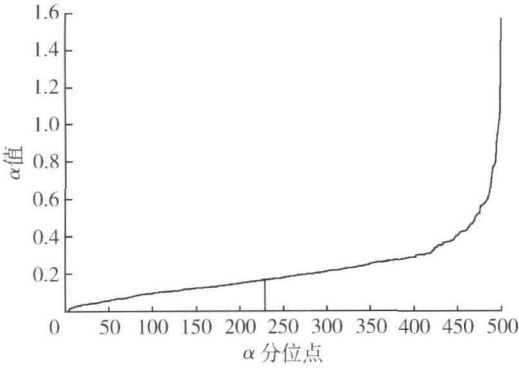


图 1 δ_{mean} 分布中 α 分位点示意图

Fig 1 α fractile illustration for δ_{mean} distribution

7) 原假设的拒绝域为 $\{\delta: \delta \geq \Delta_{1-\alpha}\}$, 即相对偏差大于阈值则认为分位点不一致.

至此, 分位点形式专家信息一致性得到完整定义. 专家对不一致的分位点进行调整时, 可参考拟和参数分布中的分位点值 x_{p_i} . 若修改后与该值较接近, 则重新检验时一致的可能性较大.

3 专家信息一致性检验实例

假设某专家对某装备的可靠性进行评估, 给出了参数的 5 个分位点, 概率值和分位点值分别为

$$P = (0.05, 0.25, 0.50, 0.75, 0.95)$$

$$X = (0.0500, 0.2430, 0.3857, 0.5437, 0.7514)$$

在使用专家信息前, 需首先将专家信息转化为验前分布形式. *Beta* 分布由于参数较少、形式较简单, 在工程实际中得到了广泛应用. 本文将专家信息转化为 *Beta* 分布. 具体检验步骤如下:

1) 专家给出的分位点信息满足分位点一致性定义中条件 ① 的要求.

2) 将 *Beta* 分布密度函数带入公式 (1), 分位点信息可表示为

$$p_i = \left[\int_0^{x_i} x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx \right] \bigg/ \left[\int_0^1 z^{a-1} (1-z)^{b-1} dz \right]$$

表 2 不同 n 取值时 *Beta* 分布分位点 $\Delta_{1-\alpha}$

Table 2 $\Delta_{1-\alpha}$ value of *Beta* distribution for different n value

$\Delta_{1-\alpha}$	n							
	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Delta_{1-10\%}$	0.0214	0.0214	0.0240	0.0196	0.0219	0.0191	0.0210	0.0188

$(i = 1, 2, \dots, n)$ (5)

3) 带入最小二乘法公式

$$E = \min_{(a,b)} \left[\sum_{i=1}^n \left[p_i - \frac{\int_0^{x_i} x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx}{\int_0^1 z^{a-1} (1-z)^{b-1} dz} \right]^2 \right]$$
 (6)

计算得到 *Beta*(1.909 0, 2.869 2).

4) 由公式 (5) 倒推, 计算拟合分布 *Beta* (1.909 0, 2.869 2) 中, 概率为 p_i 的分位点 x_{p_i} , 及 x_i 与 x_{p_i} 的相对偏差 $\delta_i, i = 1, \dots, n$, 结果见表 1.

表 1 修改前分位点的 δ_i 值

Table 1 Fractile δ_i value before modification

值	序 号				
	1	2	3	4	5
$P/\%$	5	25	50	75	95
X_i	0.050 0	0.243 0	0.385 7	0.543 7	0.751 4
x_{p_i}	0.092 6	0.238 8	0.384 5	0.546 4	0.758 0
δ_i	0.460 3	0.017 8	0.003 2	0.005 0	0.008 7

5) 根据一致性检验步骤 1) ~ 5), 计算了 *Beta* 分布中 3~ 10 个 (2 个以下的分位点总是一致的) 分位点的 $\Delta_{1-\alpha}$ 值. 当 $\alpha = 10\%$ 时, 结果见表 2.

6) 查 *Beta* 分布在置信水平 $1-10\%$ 下一致性检验阈值表, 个数为 5 的分位点一致性阈值为 0.024 0, 第一个分位点 $\delta_1 = 0.460 3$ 落在拒绝域内, 该分位点与其他分位点不一致.

7) 将分位点交专家进行修改, 重复步骤 1) ~ 6).

设专家参考了拟合分布中分位点值 x_{p_1} , 将第一个分位点值修改为 $x_1 = 0.095 0$.

重新拟合分布为 *Beta*(1.989 2, 2.984 9), 计算修改后每个分位点的相对偏差值 δ_i , 结果如表 3.

8) 所有分位点均没有落在拒绝域内, 接受 H_0 , 认为该专家给出的分位点是一致的.

表 3 修改后分位点 δ_i 值

Table 3 Fractile δ_i value after modification

值	序 号				
	1	2	3	4	5
$P/\%$	5	25	50	75	95
X	0.095 0	0.243 0	0.385 7	0.543 7	0.7514
X_{p_i}	0.097 0	0.242 5	0.385 6	0.544 0	0.752 1
δ_i	0.020 9	0.002 0	0.000 4	0.000 5	0.001 0

4 说 明

本文给出了分位点形式专家信息一致性定义及检验方法, 构建了较为完整的专家信息一致性检验流程, 为在工程实际中进行专家信息一致性检验提供了参考.

本文对于专家信息的一致性定义还需进一步完善, 关于检验统计量也可能存在更合理的构造方式. 由于本文使用的数据均是由 Matlab 随机生成的, 与专家实际给出的数据有一定差距, 仍需进一步改进. 本文仅针对分位点形式的专家信息给出了检验方法, 对于其他专家信息形式, 还需要进行更深入的研究.

参考文献:

[1] 张金槐, 唐雪梅. Bayes 方法[M]. 长沙: 国防科大出版社, 1992.

[2] Hora S, Jensen M . Expert judgement elicitation[R]. SSI Report: 2002: 19, ISSN 0282-4434, 2002.

[3] Sandri S A , Dubois D , Kalfsbeek H W. Elicitation, assessment, and pooling of expert judgments using possibility theory [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1995, 3(3): 313-335.

[4] Szwed P S , Drop J R . A Bayesian model for rare event risk assessment using expert judgment about paired scenario comparisons[C]//ASEM National Conference Proceedings. Pusan, Korea:2002: 444-453.

[5] 马深梅, 武小悦, 刘琦. 小子样装备可靠性试验中专家信息描述性综述[J]. 电子产品可靠性与环境试验, 2007, 25 (146): 62-66.

MA Limei, WU Xiaoyue, LIU Qi. Summary description of expert opinion for equipment small sample reliability[J]. Electronic Product Reliability and Environmental Testing, 2007, 25(146): 62-66. (in Chinese)

[6] Dey D K , Liu J. Prior elicitation from expert opinion: An interactive approach[M]. New England: University of Connecticut Division of Biostatistics, 2004.

[7] DeWispelare A R, Herm L T, Clemen R T. The use of probability elicitation in the high level nuclear waste regulation program [J]. International Journal of Forecasting, 1995, 11: 5-12.